MECÁNICA DE SÓLIDOS

Curso 2017/18

1 COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LOS MATERIALES

2 LAS ECUACIONES DE LA MECÁNICA DE SÓLIDOS

3 PLASTICIDAD

4 VISCOELASTICIDAD

J. A. Rodríguez Martínez

J. Zahr Viñuela

Tema 4

Viscoelasticidad

4.1 INTRODUCCIÓN

4.2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS

4.3 HERRAMIENTAS

4.4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN

4.5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT

4.6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS

4.7 INTEGRALES HEREDITARIAS

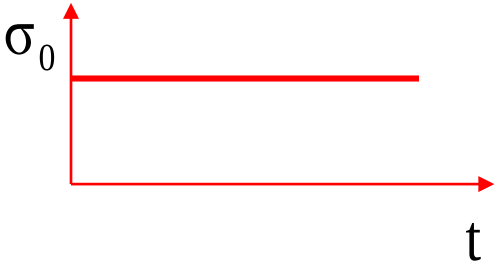
4.8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

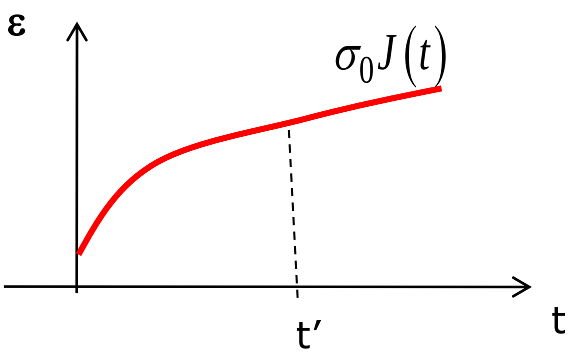
4.7 Integrales Hereditarias

Respuesta a una tensión variable en el tiempo

Ya se sabe que cuando se aplica una tensión *constante* σ_0, un material viscoelástico responde con una deformación *variable* dada por:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$$

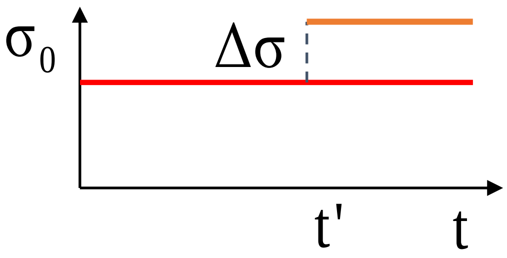




4.7 Integrales Hereditarias

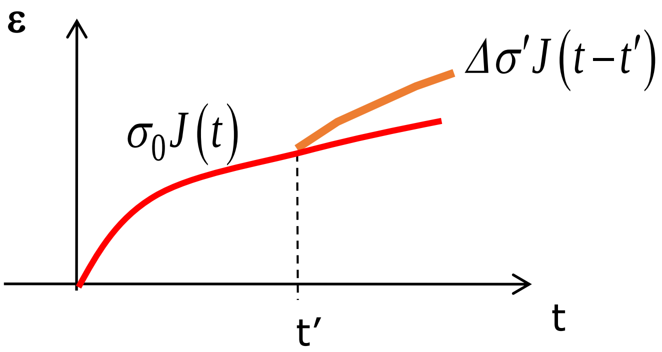
Respuesta a una tensión variable en el tiempo (cont.)

Pero la tensión aplicada puede no ser constante, por ejemplo puede estar definida en **escalones**:



$$0 < t < t' \rightarrow \varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$$

$$t' \leq t < \infty \rightarrow \varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \Delta\sigma J(t - t')$$

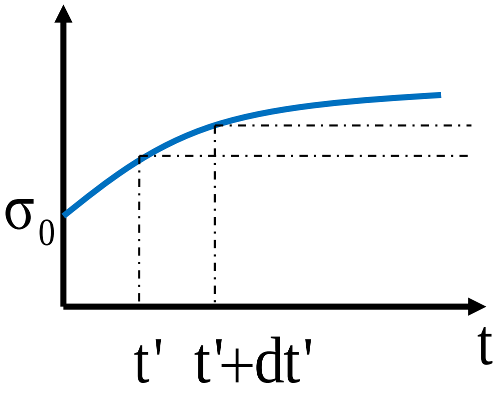


4.7 Integrales Hereditarias

Respuesta a una tensión variable en el tiempo (cont.)

Para incrementos sucesivos *finitos* de tensión:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \sum_k \Delta\sigma_k \, J(t - t'_k)$$



En el límite de incrementos *infinitesimales* de tensión, lo anterior se transforma en un integral (incremento "suave" de σ):

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \mathrm{J(t)} + \int_0^t J(t-t')d\sigma(t')$$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \mathrm{J(t)} + \int_0^t \underbrace{J(t-t')}_{\mathrm{u}} \underbrace{\frac{d\sigma(t')}{dt'}dt'}_{\mathrm{dv}}$$

Se puede usar **integración por partes** (donde t' denota la "*variable de integración*"):

$$\varepsilon(\mathrm{t}) = \sigma_0 J(\mathrm{t}) + \sigma(t')J(t-t')\Big|_0^t - \int_0^t \sigma(t') \frac{dJ(t-t')}{dt'}dt'$$

$$= \cancel{\sigma_0 J(\mathrm{t})} + \sigma(t)J(0) - \cancel{\sigma(0)J(t)} - \int_0^t \sigma(t') \frac{dJ(t-t')}{dt'}dt'$$

4.7 Integrales Hereditarias

Respuesta a una tensión variable en el tiempo (cont.)

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{dJ(t-t')}{dt'} = -\frac{dJ(t-t')}{d(t-t')}$$

Se tiene que:

$$\boxed{\varepsilon(t) = \sigma(t)J(0) + \int_0^t \sigma(t')\frac{dJ(t-t')}{d(t-t')}dt'}$$

$$\boxed{\varepsilon(t) = \sigma(0)J(t) + \int_0^t \frac{d\sigma(t')}{dt'}J(t-t')dt'}$$

4.7 Integrales Hereditarias

Respuesta a una deformación variable en el tiempo

Siguiendo un razonamiento similar al utilizado cuando se aplica una carga, puede deducirse cuando se impone una deformación que

$$\boxed{\sigma(t) = \varepsilon(t)Y(0) + \int_0^t \varepsilon(t')\frac{dY(t-t')}{d(t-t')}dt'}$$

$$\boxed{\sigma(t) = \varepsilon(0)Y(t) + \int_0^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'}Y(t-t')dt'}$$

Tema 4

Viscoelasticidad

4.1 INTRODUCCIÓN

4.2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS

4.3 HERRAMIENTAS

4.4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN

4.5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT

4.6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS

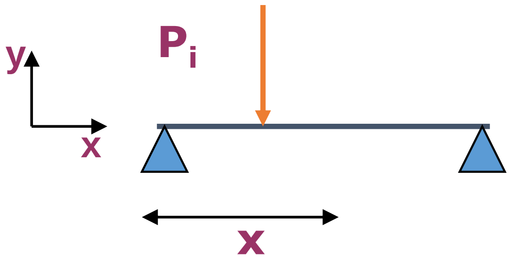
4.7 INTEGRALES HEREDITARIAS

4.8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

4.9 Principio de Correspondencia

Ejemplo 1: Si sobre una viga actúa un conjunto de cargas:

¿ Cómo son las tensiones y las deformaciones que aparecen ?



Aparece un campo de tensiones normales en la sección de la barra $\bar{\sigma}(x,y)$ que verifican las ecuaciones de equilibrio interno.

Si las cargas se mantienen *constantes* en el tiempo desde $t=0$:

$$\mathrm{P_i(t)} = \mathrm{P_i} H(\mathrm{t})$$

$$\sigma(x,y,t) = \bar{\sigma}(x,y) H(\mathrm{t})$$

Si el material es elástico (elasticidad clásica):

$$\varepsilon(x,y) = \frac{\bar{\sigma}(x,y)}{E}$$

Si el material es viscoelástico:

$$\varepsilon(x,y,t) = \bar{\sigma}(x,y) J(\mathrm{t})$$

4.9 Principio de Correspondencia

Material elástico:

$$\varepsilon(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{\sigma(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\mathrm{E}}$$

Material viscoelástico:

$$\varepsilon(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t})=\sigma(x,y)J(\mathrm{t})$$

Para pasar de la solución elástica a la viscoelástica se sustituye $1/E$ por $J(t)$ en la expresión de $\varepsilon(x,y)$

Principio de correspondencia

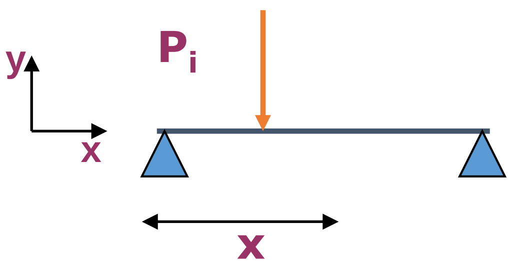
Si una barra es sometida a la acción de un sistema de cargas de valor constante aplicadas simultáneamente en $t=0$, las tensiones generadas son las mismas que se generarían en el problema elástico.

Sin embargo, las deformaciones y desplazamientos varían en el tiempo, pudiéndose obtener a partir de las correspondientes al caso elástico reemplazando E por $1/J(t)$.

4.9 Principio de Correspondencia

Ejemplo 2: Si sobre la viga se imponen desplazamientos,

¿ Cómo son las tensiones y las deformaciones que aparecen ?



Aparece un campo de deformaciones $\bar{\varepsilon}(x,y)$ que verifica las condiciones de compatibilidad.

Si los desplazamientos se mantienen constantes en el tiempo:

$$w(x,y,t)=\bar{w}(x,y)H(t)$$

$$\varepsilon(x,y,t)=\bar{\varepsilon}(x,y)H(\mathrm{t})$$

Si el material es elástico (elasticidad clásica): $\sigma(x,y)=E\,\bar{\varepsilon}(x,y)$

Si el material es viscoelástico: $\sigma(x,y,t)=Y(t)\,\bar{\varepsilon}(x,y)$

4.9 Principio de Correspondencia

Material elástico: $$\sigma(\mathrm{x},\mathrm{y}) = E\,\varepsilon(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

Material viscoelástico: $$\sigma(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t}) = Y(\mathrm{t})\,\varepsilon(x,y)$$

Para pasar de la solución elástica a la viscoelástica se sustituye E por $Y(t)$ en la expresión de $\sigma(x,y)$

Principio de correspondencia

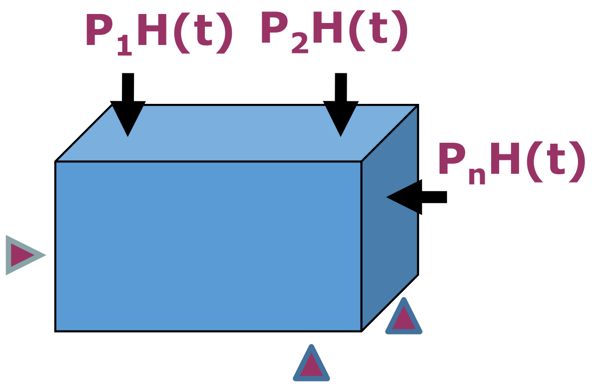
Si un sólido es sometido a campo de desplazamientos impuestos aplicadas simultáneamente en $t = 0$, las deformaciones generadas son las mismas que las que se generarían en el problema elástico.

Sin embargo, las tensiones <u>varían en el tiempo</u> pudiéndose obtener a partir de las correspondientes al caso elástico reemplazando E por $Y(t)$.

4.9 Principio de Correspondencia

Generalización: Si sobre un sólido de un material viscoelástico con $J(t)$ actúa un conjunto de cargas,

¿Cómo son las tensiones y las deformaciones que aparecen?



$$\sigma^{estático}(x,y,z)$$

Se plantea como problema equivalente con Material Elástico

$$\varepsilon^{estático}(x,y,z)=\frac{\sigma^{estático}(x,y,z)}{E}$$

Si el material tiene un comportamiento viscoelástico

$$\sigma(x,y,z,t)=\sigma^{estático}(x,y,z)H(t)$$

La solución al problema Viscoelástico se obtendría a partir de la solución al problema Elástico sustituyendo E por $1/J(t)$.

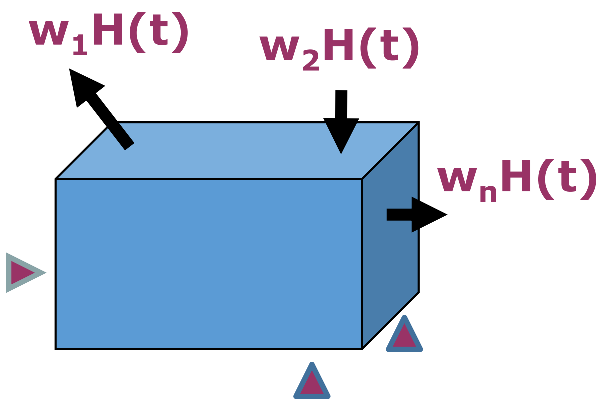
$$\varepsilon(x,y,z,t)=\sigma^{estático}(x,y,z)J(t)$$

Esta solución verifica todas las ecuaciones del problema Viscoelástico: Equilibrio Interno, Compatibilidad y <u>Constitutivas</u>.

4.9 Principio de Correspondencia

Generalización: Si sobre el sólido de un material viscoelástico con $Y(t)$ se impone un campo de desplazamiento,

¿Cómo son las tensiones y las deformaciones que aparecen?



$$\varepsilon^{estático}(x, y, z)$$

Se plantea como problema equivalente con Material Elástico

$$\sigma^{estático}(x, y, z) = E\varepsilon^{estático}(x, y, z)$$

Si el material tiene un comportamiento viscoelástico

$$\varepsilon(x, y, z, t) = \varepsilon^{estático}(x, y, z)H(t)$$

La solución al problema Viscoelástico se obtendría a partir de la solución al problema Elástico sustituyendo E por $Y(t)$.

$$\sigma(x, y, z, t) = \varepsilon^{estático}(x, y, z)Y(t)$$

Esta solución verifica todas las ecuaciones del problema Viscoelástico: Equilibrio Interno, Compatibilidad y <u>Constitutivas</u>.